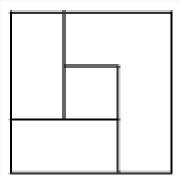
5 класс

1. Напишите в строчку первые 10 простых чисел. Как вычеркнуть 6 цифр, чтобы получилось наибольшее возможное число?
Ответ: 7317192329.
Решение: Вот первые десять простых чисел, записанных подряд: 2357111317192329. Вычеркиваем первые три цифры до 7 – это наибольший старший разряд. Вычеркиваем единицы после 7, так как 1 дает самый маленький разряд. Получаем наибольшее число.

Баллы	Критерии оценивания задания №1
5	Приведен верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

Примечание. В этой задаче решение не обязательно.
2. Можно ли разрезать квадрат на четыре части так, чтобы каждая часть соприкасалась (т.е. имела общие участки границы) с тремя другими?
Ответ: Можно.



Решение: Заметьте, что нам не дано никаких ограничений на форму кусков, определено только их количество.

Баллы	Критерии оценивания задания №2
5	Квадрат разрезан верно
0	Квадрат разрезан неверно

3. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.

30		?
21	35	
	10	8

Ответ: 40.

Решение: Если прямоугольник разрезан вертикальными и горизонтальными отрезками на 4 части, то произведения площадей противоположных частей равны. Используя это, последовательно находим площади верхней средней части ($30 \cdot 35 : 21 = 50$), правой средней части ($8 \cdot 35 : 10 = 28$) и наконец верхней правой части ($50 \cdot 28 : 35 = 40$).

Баллы	Критерии оценивания задания №3
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

4. Найдите недостающие числа:

а) 4, 7, 12, 21, 38, …;

б) 2, 3, 5, 9, …, 33;

в) 10, 8, 11, 9 , 12, 10, 13, …, …;

г) 1, 5, 6, 11, …, 28.

Ответ: а) 71; б) 17; в) 11 и 14; г) 17.

Решение: а) 71; чтобы получить очередное число, надо умножить предыдущее на 2 и вычесть порядковый номер предыдущего числа.
б) 17; чтобы получить следующее число, надо умножить предыдущее на 2 и вычесть 1.
в) 11 и 14; на чётных местах расположена последовательность 10, 11, 12, 13,..., а на нечётных местах – последовательность 8, 9, 10,...
г) 17; каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

Баллы	Критерии оценивания задания №4

5	Приведено полное обоснованное решение
3	Приведено решение и ответ только трех любых случаев
2	Приведено решение и ответ только двух любых случаев
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

5. Золотоискатель Джек добыл 9 кг золотого песка. Сможет ли он за три взвешивания отмерить 2 кг песка с помощью чашечных весов: а) с двумя гирями – 200 г и 50 г; б) с одной гирей 200 г?

Ответ: Сможет в обоих случаях.

Решение: Можно.

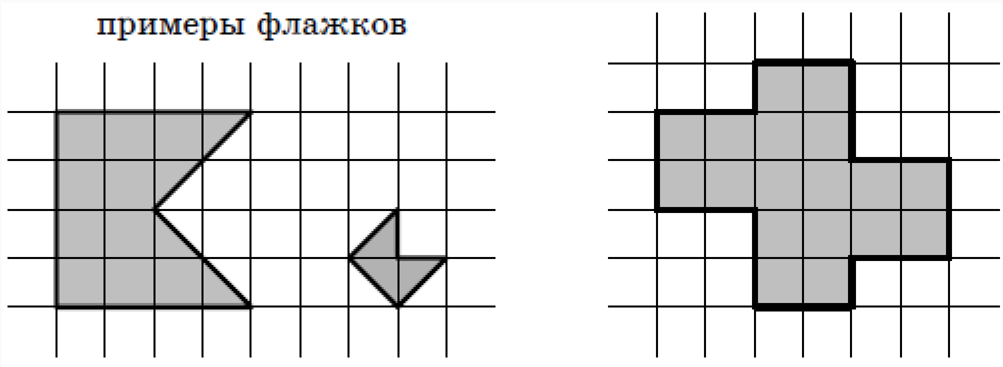
Первый случай (гири 200 г и 50 г). 1-е взвешивание: 4,5 кг = 4,5 кг. 2-е: 2,25 кг = 2,25 кг. 3-е: 2,25 кг = 2 кг+200 г+50 г.

Второй случай (гиря 200 г). 1-е взвешивание: 4,6 кг = 4,4 кг + 200 г. 2-е: 4,4 кг = 2,2 кг +2,2 кг. 3-е: 2,2 кг = 2 кг+200 г.

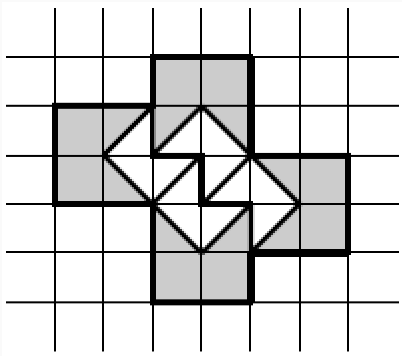
Баллы	Критерии оценивания задания №5
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведено решение и ответ только одного из случаев
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

6 класс

1. Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого – вершины некоторого квадрата и его центр. Разрежьте фигуру ниже справа на флажки (не обязательно одинаковые).



Ответ:



Баллы	Критерии оценивания задания №1
5	Приведен верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

2. На затонувшей каравелле XIV века были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырёх мешках оказалось по 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению, смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?

Ответ: 12 и 10 монет.

Решение: Число монет в этих мешках – делители числа 60, записанные в порядке убывания. Так что в пятом и шестом мешках, соответственно, 12 и 10 золотых монет.

Баллы	Критерии оценивания задания №2
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

3. Во время стоянки между двумя рейсами матросу исполнилось 20 лет. По этому случаю в кают-компании собрались все шесть членов команды.

– Я вдвое старше юнги и на 6 лет старше машиниста, – сказал рулевой.

– А я на столько же старше юнги, на сколько моложе машиниста, – заметил боцман.

– Кроме того, я на 4 года старше матроса.

– Средний возраст команды – 28 лет, – дал справку капитан.

Сколько лет капитану?

Ответ: 40 лет.

Решение: Перечислим все условия:
1) матросу 20 лет;
2) в команде шесть человек;
3) рулевой вдвое старше юнги;
4) рулевой на 6 лет старше машиниста;
5) юнге и машинисту в сумме в два раза больше лет, чем боцману;
6) боцман на 4 года старше матроса;
7) средний возраст команды 28 лет.

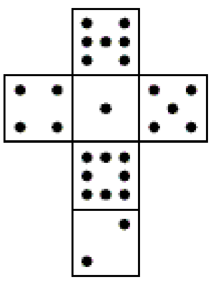
Из условий 2 и 7 следует, что сумма возрастов всех членов команды $28 \cdot 6 = 168$ лет. Из условий 1 и 6 следует, что боцману 24 года. Отсюда и из условия 5 следует, что юнге и машинисту вместе 48 лет. Отсюда и из условий 3 и 4 мы можем определить возраст юнги и машиниста: Ю + М = 48, 2Ю = М + 6. Решив эту систему уравнений, определим, что юнге 18 лет, а машинисту – 30. Отсюда и из условий 3 и 4 следует, что рулевому 36 лет. Зная возраст пяти членов команды и сумму возрастов всех членов команды, можно определить возраст капитана: К = 168 – (20 + 24 + 18 + 30 + 36) = 40.

Баллы	Критерии оценивания задания №3
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

4. Петя хочет изготовить необычную игральную кость, которая, как обычно, должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на каждых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек). Сколько всего точек необходимо для этого нарисовать?

Ответ: 27 точек.

Решение: Расставим шесть чисел (по количеству точек на гранях куба) в порядке возрастания. Докажем, что среди них нет трёх подряд идущих чисел. Допустим, что такие три числа есть: a, $a + 1$ и $a + 2$. Тогда числа a и $a + 1$ должны стоять на противоположных гранях куба. Куда бы теперь ни поставили число $a + 2$, оно будет стоять рядом с $a + 1$. Противоречие. Итак, нам надо найти последовательность из шести чисел с минимальной суммой, в которой нет трёх подряд идущих чисел. Эта последовательность 1, 2, 4, 5, 7, 8, а общее число точек равно $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$. Пример их расположения на гранях куба изображён на рисунке.



Баллы	Критерии оценивания задания №4
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

5. В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных написали: «Никто из этих десяти не получит!» Конечно же, все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько колдунов получили диплом?

Ответ: 2 колдуна.

Решение: Предположим, что никто не получил диплом. Тогда высказывание каждого ученика истинно. В этом случае все должны были получить дипломы – противоречие. Значит, хотя бы один из учеников получил диплом ясновидящего. Он сказал правду, поэтому никто, кроме его соседей, диплома не получил. Если оба соседа также остались без дипломов, то утверждение «Никто из этих десяти не получит!» для каждого из них истинно, но ведь они должны были ошибиться! Если же оба соседа сдали экзамен, то они оба ошиблись в своих высказываниях. Значит, только один из соседей мог сдать экзамен успешно. Действительно, в этом случае его высказывание истинно, а высказывание второго соседа – ложно.

Баллы	Критерии оценивания задания №5
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Приведено в целом верное решение. Имеются небольшие недочёты, не влияющие на решение
2	Получено верное решение, но без обоснования
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

7 класс

1. Найдите решение числового ребуса $a,bb + bb,ab = 60,$ $где\ a\ и\ b -$ различные цифры.

Ответ: $4{,}55 + 55{,}45 = 60$.

Баллы	Критерии оценивания задания №1
5	Приведен верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

2. К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. Известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

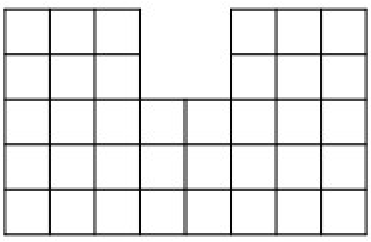
Ответ: 600 учащихся.

Решение: Пусть нужно x упаковок по 24 шоколадки. Тогда потребуется $(x + 5)$ упаковок по 20 шоколадок. Так как в обоих случаях приобретается одинаковое количество плиток шоколада, составим и решим уравнение:

$$24x = 20 \cdot (x + 5)$$
$$4x = 100$$
$$x = 25$$
$$24 \cdot 25 = 600.$$

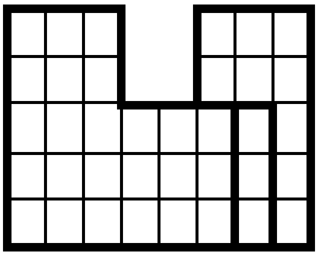
Баллы	Критерии оценивания задания №2
5	Приведен верный ответ
3	Верно составлено уравнение, но при решении допущена вычислительная ошибка
2	Верно составлено уравнение
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

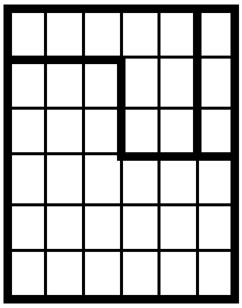
3. Разрежьте приведенную ниже фигуру на три части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат $6x6$.



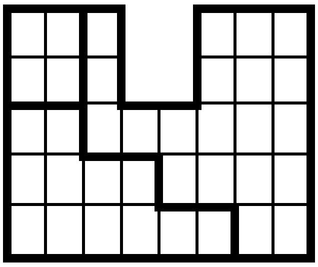
Ответ:

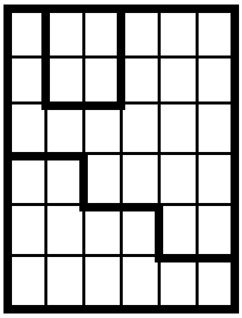
1-ый способ



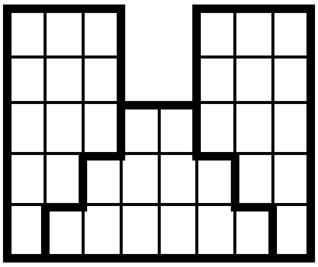


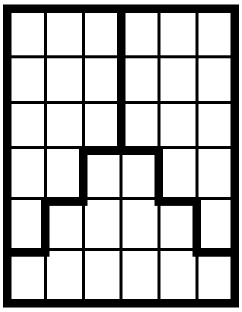
2-ой способ





3-ий способ





Баллы	Критерии оценивания задания №3
5	Приведен один любой из способов
2	Исходная фигура верно разделена на части, но из них не составлен квадрат
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

4. Известно, что среди 80 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем все остальные, имеющие одинаковый вес. При помощи 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите фальшивую монету.

Решение: Нужно разделить 80 монет на три группы в 27, 27 и 26 монет. При первом взвешивании на каждую чашу весов положить по 27 монет. Если весы будут в равновесии, то фальшивая монета находится среди оставшихся 26. Если весы не будут в равновесии, то фальшивая монета находится в более легкой кучке монет. При втором взвешивании разделяем на три части: 9, 9 и 8 (или 9, 9 и 9). При третьем – 3, 3 и 2 (или 3, 3 и 3). При четвертом взвешивании останется 2 или 3 монеты, которые взвешиваем аналогично.

Баллы	Критерии оценивания задания №4
5	Приведен верный ответ
3	Условие задачи выполнено, но рассмотрены не все случаи
2	Ход решения верен, но решение не доведено до конца
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

5. Предприниматель положил в банк $300\,000$ р. на два различных вклада, причем по одному вкладу ему насчитывали 7% годовых, а по другому – 8% годовых. Через год он получил $22\,200$ р. прибыли. Какая сумма была внесена на каждый из вкладов?

Ответ: $180\,000$ и $120\,000$ рублей.

Решение: Пусть предприниматель положил x рублей на первый вклад, тогда на второй вклад он положил $(300\,000-x)$ рублей. С первого вклада он получил прибыль $7\%\cdot x=0{,}07x$ рублей. Со второго вклада $-8\%\cdot(300\,000-x)=0{,}08(300\,000-x)=24000-0{,}08x$ рублей. Тогда:

$$0{,}07x+(24\,000-0{,}08x)=22\,200$$
$$0{,}07x-0{,}08x=22\,200-24\,000$$
$$-0{,}01x=-1\,800$$
$$x=180\,000$$

180 000 рублей положил предприниматель на первый вклад, 300 000 – 180 000 = 120 000 рублей положил предприниматель на второй вклад.

Баллы	Критерии оценивания задания №5
5	Приведен верный ответ
3	Верно найдена сумма только одного вклада
2	Верно составлено уравнение, но при решении допущена вычислительная ошибка
1	Верно составлено уравнение
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

8 класс

1. В некоторой школе в каждом из 20 классов выбрали совет из 5 учеников. Петя оказался единственным мальчиком, избранным в совет класса вместе с четырьмя девочками. Он заметил, что еще в 15 классах девочек выбрали больше, чем мальчиков, хотя в целом по школе мальчиков и девочек выбрано поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек в советах четырёх оставшихся классов (в сумме)?

Ответ: 19 мальчиков и одна девочка.

Решение: Всего в советы было выбрано $5 \cdot 20 = 100$ человек. Девочек – половина, то есть 50. Если в классе было выбрано больше девочек, чем мальчиков, то девочек выбрано не менее трёх. Значит, в 15 классах было выбрано не менее 45 девочек. Еще четыре девочки было выбрано в Петином классе. Так как Петя – единственный мальчик, оказавшийся в совете вместе с четырьмя девочками, то больше ни в одном из классов не могли быть выбраны четыре девочки. Значит, в 16 классах выбрано ровно 49 девочек. Следовательно, в оставшихся четырёх классах выбрали 19 мальчиков и одну девочку.

Баллы	Критерии оценивания задания №1
5	Дан правильный ответ, верный ход рассуждений
2	Правильный ход рассуждений, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки
1	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
0	Ответ неверен или не обоснован

2. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = 69$.

Ответ: $(35; 34)$ или $(13; 10)$.

Решение. $(x-y)(x+y) = 69$

$69 = 1 \cdot 69 = 69 \cdot 1 = 3 \cdot 23 = 23 \cdot 3$, учитывая, что $x > y$, имеем:

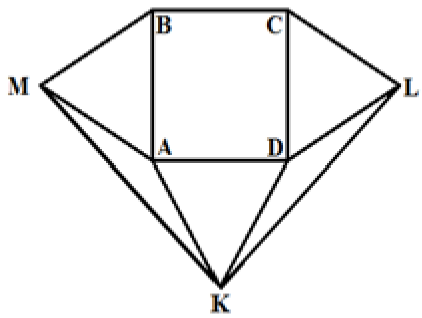
$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases}$

Решая данные системы, находим два решения: $(35; 34)$ или $(13;\ 10)$.

Баллы	Критерии оценивания задания №2
5	Приведен верный ответ, верный ход рассуждений, рассмотрены оба случая
3	Дан правильный ответ, верный ход рассуждений, рассмотрен один случай
2	Не учтено условие x > y
1	Ответ не обоснован
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

3. На сторонах *AB*, *CD* и *AD* квадрата *ABCD* вовне построены равносторонние треугольники *ABM*, *CLD* и *ADK* соответственно. Найдите $\angle MKL$.

Ответ: $90°$.



Решение: Каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$. Рассмотрим треугольник MAK: $\angle MAK = 360° - \angle BAD - \angle MAB - \angle KAD$.$\angle MAK = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$. $MA = AK$ по условию, значит, треугольник MAK равнобедренный, $\angle AMK = \angle AKM = (180° - 150°): 2 = 15°$.

Аналогично получаем, что $\angle DKL = 15°$. Тогда искомый угол MKL равен сумме

$\angle MKA + \angle AKD + \angle DKL = 15° + 60° + 15° = 90°$.

Баллы	Критерии оценивания задания №3
5	Дан правильный ответ, верный ход рассуждений
3	Правильный ход рассуждений, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки
2	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
1	Верно выполнен чертеж. Решение отсутствует
0	Ответ неверен или не обоснован

4. На экране терминала с доступом к «Матрице» горит число, которое каждую минуту увеличивается на 102. Начальное значение числа 123. Хакер Нео имеет возможность в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число никогда не стало четырёхзначным? Добившись этого, он зациклит действия агентов и спасёт своих друзей.

Ответ: Может.

Решение:

Первый способ. Покажем, что Нео сможет снова получить число 123 и таким образом повторять свои действия неограниченное количество раз. Алгоритм:

123 → 225 → 327 ~ 237 → 339 → 441 ~ 144 → 246 → 348 → 450 ~ 405 → 507 → 609 → 711 ~ 117 → 219 → 321 ~ **123**.

Второй способ. Покажем, что Нео может придти от начального значения 123 к набору цифр 549, а затем повторно получить набор цифр 549. 123 → 225 ~ 252 → 354 ~ 345 → 447 → **549** → 651 → 753 ~ 357 → 459 ~ **549**.

Баллы	Критерии оценивания задания №4
5	Дан правильный ответ, верный ход рассуждений. Достаточно одного способа
3	Правильный ход рассуждений, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки
1	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
0	Ответ неверен или не обоснован

Замечание. Возможен другой ход рассуждений.

5. На острове живёт нечётное число людей, причём каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Как-то раз все рыцари заявили: — «Я дружу только с одним лжецом», а все лжецы: — «Я не дружу с рыцарями». Кого на острове больше, рыцарей или лжецов?

Ответ: Рыцарей больше.

Решение: Каждый лжец дружит хотя бы с одним рыцарем. Но так как каждый рыцарь дружит ровно с одним лжецом, у двух лжецов не может быть общего друга-рыцаря. Тогда каждому лжецу можно поставить в соответствие его друга рыцаря, откуда получается, что рыцарей, по крайней мере, столько же, сколько и лжецов. Так как всего жителей на острове нечётное число, то равенство невозможно. Значит, рыцарей больше.

Баллы	Критерии оценивания задания №5
5	Дан правильный ответ, верный ход рассуждений.
3	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания.
2	Дан правильный ответ, но в пояснениях нет ссылки на условие нечетности числа жителей.
1	Дан правильный ответ, но недостаточно обоснован.
0	Ответ неверен или не обоснован.