Региональный этап Оренбургской областной олимпиады

школьников 5-8 классов

Критерии оценивания по математике 2025-2026 гг.

8 класс

1. Можно ли найти четыре различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трёх делится на 3, а сумма всех четырёх делится на 4?

Ответ: можно.

Решение. Можно, например, 5, 17, 29, 41. Указанные четыре числа можно записать в виде $12k+5$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, поэтому сумма любых трёх чисел $(12k_1+5)+(12k_2+5)+(12k_3+5)=12(k_1+k_2+k_3)+15$ делится на 3. Все числа в наборе нечётные, значит, сумма любых двух делится на 2. Наконец, сумма всех четырёх чисел равна 72 и делится на 4.

Баллы	Критерии оценивания задания № 1
5	Приведено полное обоснованное решение
2	Приведен только верный ответ или задача решена подбором подходящих чисел
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

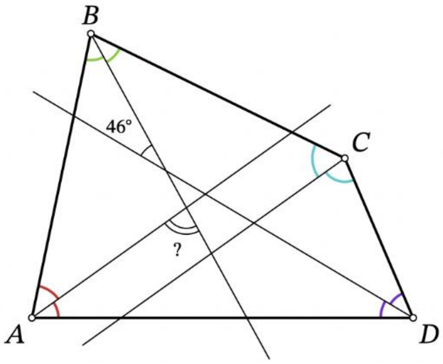
2. Пловец прыгает с плота и плывет против течения 10 минут, после чего он поворачивает и плывет по течению и настигает плот, когда тот проплыл 1 км. Определить скорость течения реки. В ответ запишите число метров в минуту.

Ответ: 50.

Решение. Обозначим через x км/мин скорость пловца, через y км/мин – скорость реки. за 10 минут против течения реки пловец проплывет $10(x-y)$ км. Следовательно, расстояние от точки поворота до точки, в которой пловец догонит плот, равно $10(x-y)+1$ км. Это расстояние пловец преодолеет за $\frac{1-10y}{y}$ мин. Решая уравнение $\frac{10(x-y)+1}{x+y}=\frac{1-10y}{y}$, получим $y=0{,}05$ км/мин.

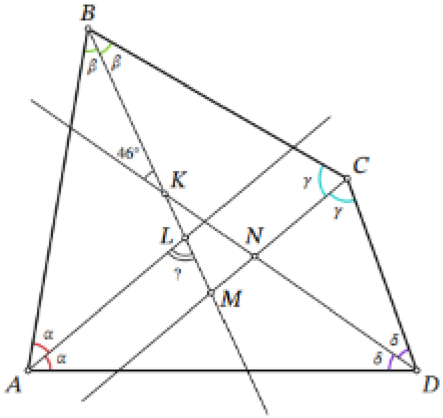
Баллы	Критерии оценивания задания № 2
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом $46°$ как изображено на рисунке ниже. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



Ответ: $67°$.

Решение. Отметим точки пересечения биссектрис K, L, M, N. Кроме этого, обозначим $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma, \angle D = 2\delta$. Поскольку сумма четырехугольника $ABCD$ равна $360°$, имеем $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$.



Рассмотрим треугольник KMN. В нем: $\angle MKN = 46°, \angle KMN = \angle ALM = \alpha + \beta$, так как $\angle ALM$ − внешний угол треугольника ABL (этот угол нужно найти в задаче), $\angle KNM = \angle CND = 180° - \gamma - \delta = \alpha + \beta$.

Следовательно, треугольник KMN − равнобедренный, и $\angle KMN = \frac{180°-46°}{2} = 67°$.

Баллы	Критерии оценивания задания № 3
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

4. Несколько восьмиклассников решали задачи. Учитель не записал у себя в журнале, сколько всего было учеников, и сколько задач каждый из них решил. Зато, он помнит, что, с одной стороны, каждый ученик решил задач больше, чем пятая часть от того, что решили остальные. А с другой стороны, он знает, что каждый ученик решил задач меньше, чем треть от того, что решили остальные. Сколько могло быть восьмиклассников? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 5.

Решение. Пусть восьмиклассников было n. Пусть, кроме этого, i-й восьмиклассник $(i = 1, \dots, n)$ решил a_i задач. По условию для любого i выполнены неравенства $a_i > \frac{1}{5} \cdot (S - a_i)$ и $a_i < \frac{1}{3} \cdot (S - a_i)$, где $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ − общее количество решенных задач, причем каждая задача учтена столько раз, сколько восьмиклассников ее решили. Неравенства равносильны системе двойных неравенств $\frac{S}{6} < a_i < \frac{S}{4}$, $i = 1, \dots, n$.

Сложив почленно все эти неравенства, получим $\frac{nS}{6} < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S < \frac{nS}{4}$, что после сокращения на S равносильно условию $4 < n < 6$. Так как n − целое число, то $n = 5$. Ситуация с $n = 5$ возможна, например, если все ученики решили по одной задаче.

Баллы	Критерии оценивания задания № 4
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует

5. На острове Лжецов и Рыцарей расстановку по кругу называют правильной, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди двух его соседей есть представитель его племени. Однажды 2025 аборигенов образовали правильную расстановку по кругу. К ним подошел лжец и сказал: "Теперь мы вместе тоже можем образовать правильную расстановку по кругу". Сколько рыцарей могло быть в исходной расстановке?

Ответ: 1350.

Решение. Докажем, что правильная расстановка по кругу возможна тогда и только тогда, когда рыцарей, по крайней мере, в два раза больше, чем лжецов.

Действительно, из условия задачи следует, что в такой расстановке соседями каждого лжеца являются два рыцаря, а среди соседей любого рыцаря есть хотя бы один рыцарь. Тогда правильная расстановка должна выглядеть так: группа рыцарей, лжец, группа рыцарей, лжец, и так далее (в каждой группе не менее двух рыцарей). Значит, при такой расстановке рыцарей хотя бы в два раза больше, чем лжецов.

В обратную сторону: если рыцарей в два раза больше, чем лжецов, то делаем расстановку вида РРЛРРЛ…, а оставшихся рыцарей (если они есть) помещаем между любыми двумя рыцарями. Таким образом, если выполняется такое условие, то правильная расстановка возможна.

Пусть в правильной расстановке, указанной в условии, стоят Р рыцарей и Л лжецов, тогда $Р \geq 2Л$. Подошедший лжец сказал неправду, поэтому вместе с ним правильная расстановка невозможна, следовательно, $Р \leq 2Л + 1$. Таким образом, $Р = 2Л$ или $Р = 2Л + 1$. В первом случае, в исходной расстановке $2025 \cdot \frac{2}{3} = 1350$ рыцарей, а второй случай невозможен, так как число $(2025 - 1) \cdot \frac{2}{3}$ не будет целым.

Баллы	Критерии оценивания задания № 5
5	Приведено полное обоснованное решение
3	Найдена идея решения, но решение не доведено до конца или выполнена лишь часть задания
2	Приведен только верный ответ
0	Приведен неверный ответ или ответ отсутствует