

Задачи муниципального этапа 2025-2026 учебного года

7 класс

7.1. У малыша Димы на два зуба больше, чем у малышки Юли. У боксёра Коли зубов столько же, сколько у Димы и Юли, вместе взятых, но вдвое меньше, чем у биолога Вани. Всего на них четверых приходится 64 зуба. Сколько у кого зубов?

Решение. Пусть у Димы x зубов, тогда у Юли будет $(x - 2)$ зуба, у Коли $(x + x - 2)$ зуба, у Вани $2(x + x - 2)$ зубов. Всего получаем: $x + (x - 2) + (x + x - 2) + 2(x + x - 2) = 64$. То есть $8x - 8 = 64$. Отсюда получим $x = 9$. То есть у Димы 9 зубов, у Юли 7 зубов, у Коли 16 зубов, у Вани 32 зуба.

Ответ: количество зубов: Дима - 9, Юля - 7, Коля - 16, Ваня - 32.

7.2. Три друга – Пётр, Роман и Сергей - учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман - химик. Сможете ли вы определить специальности каждого?

Решение. Предположим, что Роман не физик, тогда (по условию 2) Пётр математик, но если Пётр математик, то Сергей (по условию 1) не физик – получилось явное противоречие. Значит, Роман – физик. Тогда Сергей математик – иначе (по условию 3) Роман был бы химиком. Значит, Пётр – химик. Итак: Пётр – химик, Роман – физик, Сергей – математик.

Ответ: Пётр – химик, Роман – физик, Сергей – математик.

7.3. Дан прямоугольник, у которого длина в полтора раза больше ширины. Известно, что периметр прямоугольника численно равен его площади. Найдите стороны прямоугольника.

Решение. Пусть x - ширина, тогда $1,5x$ - длина прямоугольника. Из условий задачи получаем уравнение $2(1,5x + x) = 1,5x \cdot x$. Тогда $5x = \frac{3}{2}x^2$. Отсюда, деля на x , где $x \neq 0$, получим $5 = \frac{3}{2}x$, и тогда $x = \frac{10}{3}$. Следовательно, вторая сторона равна 5.

Ответ: $\frac{10}{3}$ и 5.

7.4. Винни-Пух и Тигра лезут на две одинаковые елки. Вверх Винни-Пух лезет в два раза медленнее, чем Тигра, а вниз Винни-Пух спускается в три раза быстрее, чем Тигра. Начали и закончили Винни-Пух и Тигра одновременно. Во сколько раз быстрее Тигра лезет вверх, чем вниз?

Решение. Пусть вверх Тигра лезет T минут, а вниз – t минут. Тогда Винни-Пух вверх лезет $2T$ минут, а вниз – $\frac{t}{3}$ минут. По условию задачи $T + t = 2T + \frac{t}{3}$, откуда $t = 1,5T$.

Ответ: в 1,5 раза.

7.5. В ряд стоят 20 свободных стульев. Время от времени к ним подходит человек и садится на один из свободных стульев, при этом один из его соседей, если таковые есть, моментально встаёт и уходит (вместе эти двое не сидят). Какое максимальное число стульев может быть занято?

Решение. Заметим, что все стулья не могут быть заняты, иначе бы в тот момент, когда на стул садился 20-й человек, никто бы не ушёл, а соседний стул занят. Покажем, как могут быть заняты 19 стульев. Первый человек занимает первый стул, следующий человек занимает третий стул, третий человек занимает второй стул, а третий уходит. Далее очередной человек занимает четвертый стул, следующий занимает третий и четвёртый уходит и т.д. Такими операциями можно заполнить первые 19 стульев.

Ответ: 19.

8 класс

8.1. Доказать, что число $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n .

Решение. Заметим, что $n^3 + 17n = (n^3 - n) + 18n = (n-1)n(n+1) + 18n$. Выражение $(n-1)n(n+1)$ является произведением трёх последовательных натуральных чисел, которое делится на 6, из которых хотя бы одно чётно, а значит, делится на 2, и есть одно, которое делится на 3. Следовательно, $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n , что и требовалось доказать.

8.2. В олимпиаде по математике приняло участие более 55 и менее 60 школьников. При этом число мальчиков составило более 90% и менее 91% от числа девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек приняло участие в олимпиаде? Укажите все возможные случаи.

Решение. Пусть x и y - число мальчиков и число девочек соответственно. Тогда $56 \leq x + y \leq 59$ и $0,9 < \frac{x}{y} < 0,91$. Откуда $0,9y < x < 0,91y$, $1,9y < x + y < 1,91y$. Тогда $1,9y < 59$ и $1,91y > 56$, а значит $29,3 < y < 31,05$. Если $y = 30$, то $27 < x < 27,3$, что невозможно. Если $y = 31$, то $27,9 < x < 28,1$, откуда $x = 28$.

Ответ: 31 девочка и 28 мальчиков.

8.3. После того, как учительница Марья Ивановна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку со второго ряда на третий, а Машеньку с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, уве-

личился на неделю, сидящих во втором ряду увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

Решение. Пусть в третьем ряду сидит x человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, делённой на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду – увеличился на 24 недели, а на третьем ряду – уменьшился на $4x$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников измениться не могла, то $4x=12+24$, значит, $x=9$.

Ответ: 9 человек.

8.4. На медиане BM треугольника ABC ($BM > \frac{AC}{2}$) отмечена точка K так, что $BK = \frac{AC}{2}$. Известно, что $\angle BMA = 60^\circ$. Доказать, что $AB = KC$.

Решение. На отрезке BM отметим точку N такую, что $MN = BK$. Тогда треугольник AMN – равносторонний, отсюда $AN = MC$, $\angle BNA = 120^\circ$. Значит, треугольники ANB и CMK равны, отсюда $AB = CK$, что и требовалось доказать.

8.5. Алёша и Витя отправляются из пункта N в пункт M , расстояние между которыми равно 20 км. К сожалению, на двоих у них есть только один велосипед. Из N Алёша выезжает на велосипеде, а Витя выходит пешком. Алёша может оставить велосипед в любой точке дороги, продолжив путь пешком. Когда Витя дойдет до этой точки, он пересаживается на велосипед. Скорость Алёши пешком – 4 км/ч, на велосипеде – 15 км/ч. Скорость Вити пешком – 5 км/ч, на велосипеде – 20 км/ч. В какой точке Алёша должен оставить велосипед, чтобы в M они с Витей прибыли одновременно?

Решение. Обозначим за x (км) расстояние от N до точки, где Алёша оставляет велосипед. Тогда на весь путь Алёша затратит $\frac{x}{15} + \frac{20-x}{4}$ часов, а Витя затратит $\frac{x}{5} + \frac{20-x}{20}$ часов. Составляя и решая уравнение, находим $x=12$ (км).

Ответ: В 12 км от пункта N .

9 класс

9.1. Докажите, что $2^{39} + 2^9$ делится на 100.

Решение. Преобразуем:

$$2^{39} + 2^9 = 2^9((2^{10})^3 + 1) = 2^9(2^{10} + 1)(2^{20} - 2^{10} + 1) = 2^9 \cdot 1025 \cdot (2^{20} - 2^{10} + 1) =$$

$=4 \cdot 1025 \cdot 2^7 \cdot (2^{20} - 2^{10} + 1) = 4100 \cdot 2^7 \cdot (2^{20} - 2^{10} + 1)$. Это выражение делится на 100, значит, и исходное число также делится на 100, что и требовалось доказать.

9.2. Относительно чисел a, b, c, d известно, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Вычислите $ab + cd$.

Решение. Рассмотрим равенство: $(ac + bd)(ad + bc) = 0$, так как $ac + bd = 0$. Получаем $a^2 cd + b^2 cd + c^2 ab + d^2 ab = 0$, или $(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = 0$. Так как $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то получаем: $ab + cd = 0$.

Ответ: 0.

9.3. Точка D - середина стороны AC треугольника ABC , DE и DF - биссектрисы треугольников ABD и CBD . Отрезки BD и EF пересекаются в точке M . Докажите, что $DM = \frac{1}{2} EF$.

Решение. По свойству биссектрисы для треугольников ABD и CBD можно записать: $BE:EA = BD:DA = BD:DC = BF:FC$. Значит, по обратной теореме Фалеса $EF \parallel AC$, откуда $EM:MF = AD:DC = 1:1$, то есть DM - медиана треугольника EDF . Но $\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ADB + \angle CDB) = 90^\circ$. Таким образом, $DM = \frac{1}{2} EF$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.

9.4. В коробке лежат несколько (больше трёх) шариков. Каждый покрашен в какой-то цвет. Если достать из коробки любые три шарика, то среди них обязательно будет хотя бы один красный и хотя бы один синий. Сколько шариков может быть в коробке?

Решение. В коробке не больше, чем по два красных и синих шарика (иначе можно было бы достать три красных или три синих) и не больше одного шарика других цветов (иначе можно было бы достать один синий или красный шарик и два шарика других цветов). Получается, что шариков в коробке не больше пяти, причём если их пять, то среди них по два синих и красных и один - какого-то третьего цвета. Но тогда мы можем достать шарик третьего цвета и два синих. Значит, пяти шариков в коробке быть не может. Стало быть, их там четыре: два синих и два красных.

Ответ: 4.

9.5. В круг выложили 30 бусин (голубых и зелёных). У 26 бусин соседней была голубая, а у 20 бусин соседней была зелёная. Сколько было голубых бусин?

Решение. Найдём число бусин, рядом с которыми была и голубая, и зелёная: $26 + 20 - 30 = 16$. Число бусин, рядом с которыми были только голубые, равно $26 - 16 = 10$. Число голубых бусин равно $\frac{10 \cdot 2 + 16}{2} = 18$. Приведём пример такого расположения. Обозначим голубую бусину (г), зелёную – (з). Пусть бусины по кругу располагаются в следующем порядке по часовой стрелке: г з г г г з г г г з г з г г г з з г г з г г з з з г г з, причём первая и последние бусины являются соседними. При этом все условия выполняются, и голубых бусин 18.

Ответ: 18 голубых бусин.

10 класс

10.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые делятся на 17 и оканчиваются на 17?

Решение. Обозначим четырёхзначное число $\overline{xy17}$. Тогда число $\overline{xy17} - 17$ тоже делится на 17. Но тогда $\overline{xy17} - 17 = 100 \cdot \overline{xy} + 17 - 17 = 100 \cdot \overline{xy}$. Так как числа 100 и 17 являются взаимно простыми, то двузначное число $\overline{xy}$ делится на 17. Перебором находим все двузначные числа, делящиеся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Их всего пять. Тогда искомым чисел также будет пять.

Ответ: 5.

10.2. Известно, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$. Найдите $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Решение.

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{c+(a+b)}{a+b} + \frac{a+(b+c)}{b+c} + \frac{b+(c+a)}{c+a} = \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1.$$

Тогда $7 \cdot \frac{7}{10} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + 3$. Значит, искомая сумма равна $7 \cdot \frac{7}{10} - 3 = \frac{19}{10}$.

Ответ: $\frac{19}{10}$.

10.3. От двух кусков сплава серебра и золота (с различным содержанием золота) массой в 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого куска, после чего процентное со-

держание золота в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение. Пусть p и q - первоначальные доли золота в первом и втором кусках соответственно, x - масса отрезанного куска. Тогда доля золота в сплаве отрезанной первой части с остатком второго равна $\frac{xp+(12-x)q}{12}$, а в сплаве отрезанной части второго куска с остатком первого равна $\frac{xq+(6-x)p}{6}$. Приравнивая эти доли, получаем $3x(p-q)=12(p-q)$. По условию $p \neq q$, следовательно, $x=4$.

Ответ: 4 кг.

10.4. Прямоугольный треугольник ABC (катет BC больше катета AC) вписан в окружность. На стороне BC выбрана такая точка D , что $BD=AC$, точка M - середина дуги ACB . Найдите угол CDM .

Решение. Заметим, что AB - диаметр описанной окружности. Соединим точку M с точками A, B, C и D . Так как дуги AM и BM равны, то равны и хорды AM и BM , которые их стягивают. Отрезки BD и AC равны по условию. Наконец, углы MBC и MAC равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники MBD и MAC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство сторон MD и MC , а значит, треугольник MCD - равнобедренный. Остаётся заметить, что $\angle MCD = \angle MCB = \angle MAB = 45^\circ$, так как дуга MB равна половине окружности.

Ответ: 45° .

10.5. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трёх цветов?

Решение. Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую - одной из двух оставшихся. Третью - одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первая доска 3 варианта, вторая 2, далее однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

Ответ: 1530 способами.

11 класс

11.1. Решить уравнение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$.

Решение. Допустимые значения x : $x \geq 1$. Обозначим $a=2\sqrt{x-1}$. Возводя в квадрат обе части уравнения и выполняя преобразования, получим:

$$x-a+2\sqrt{(x-a)(x+a)}+x+a=4$$

$$2x+2\sqrt{x^2-a^2}=4$$

$$x+\sqrt{x^2-4x+4}=2$$

$$\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$$

Поскольку левая часть полученного равенства не отрицательна, правая тоже должна быть не отрицательной. Таким образом, равенство может быть выполнено, только если $1 \leq x \leq 2$. Ещё раз возведя в квадрат обе части, получим равенство $x^2-4x+4=x^2-4x+4$. Это равенство истинно при всех допустимых значениях x . То есть $x \in [1;2]$.

Ответ: $[1;2]$.

11.2. Чему может быть равно значение выражения $p^4 - 3p^3 - 5p^2 + 16p + 2015$, если p является корнем уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$?

Решение. Преобразуем выражение:

$$p^4 - 3p^3 - 5p^2 + 16p + 2015 = (p^3 - 5p + 1) \cdot (p - 3) + 2018.$$

Так как p является корнем многочлена $p^3 - 5p + 1$, то всё выражение в правой части равно 2018, следовательно, и значение в левой части тоже равно 2018.

Ответ: 2018.

11.3. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трёх цветов?

Решение. Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую - одной из двух оставшихся. Третью - одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первая доска 3 варианта, вторая 2, далее однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

Ответ: 1530 способами.

11.4. Треугольник ABC - равносторонний. На стороне AC отметили точку M , а на стороне BC - точку N , причём $MC = BN = 2AM$. Отрезки MB и AN пересекаются в точке Q . Найдите угол CQB .

Решение. Так как $MC = BN$ и $AC = BC$, то $AM = AC - MC = BC - BN = NC$. Из того, что $AM = NC$, $AB = AC$ и $\angle BAM = \angle CAN = 60^\circ$ следует, что треугольники BAM и ACN равны, поэтому $\angle NAC = \angle MBA = \alpha$. Из треугольника ABM следует: $\angle AMB = \angle AMQ = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$. А из треугольника AQM следует:

$$\angle AQM = 180^\circ - \angle AMQ - \alpha = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - \alpha = 60^\circ.$$

Тогда $\angle MQN = 120^\circ$, поэтому $\angle MQN + \angle MCN = 180^\circ$. Отсюда следует, что четырёхугольник $MQNC$ вписанный. Но тогда $\angle NQC = \angle NMC$. В треугольнике NMC сторона NC в два раза меньше стороны MC , а угол между ними равен 60° , поэтому этот треугольник - прямоугольный с углами $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$. Из этой же вписанности следует: $\angle MQC = \angle MNC = 90^\circ$, тогда $\angle CQB$ тоже прямой.

Ответ: 90° .

11.5. В шахматном турнире на кубок города участвовали мальчики и девочки из школ города. Каждый игрок играл с каждым по одной партии, за победу давалось 1 очко, за ничью - 0,5, за поражение - 0. По окончании турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мальчиками. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа.

Решение. Пусть в турнире участвовали n мальчиков и k девочек. Поскольку каждый мальчик набрал половину своих очков в матчах с мальчиками, то количество очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, равно количеству очков, набранных мальчиками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}n(n-1)$. Аналогично, количество очков, набранных девочками в матчах с

мальчиками, равно количеству очков, набранных девочками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}k(k-1)$. Сумма очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, и очков, набранных девочками в матчах с мальчиками, равна количеству матчей между девочками и мальчиками, то есть nk . Таким образом, $k(k-1)+n(n-1)=2nk$, откуда получим $n+k=(k-n)^2$.